

信号処理若手奨励賞審査対象

# Regularization by Denoising を用いた グラフ信号のノイズ除去とその信号処理的解釈

小島 颯

東京農工大学大学院工学府

[s231625r@st.go.tuat.ac.jp](mailto:s231625r@st.go.tuat.ac.jp) / [h-kojima@misp-lab.org](mailto:h-kojima@misp-lab.org)

世の中のデータの多くはネットワーク構造を持つ

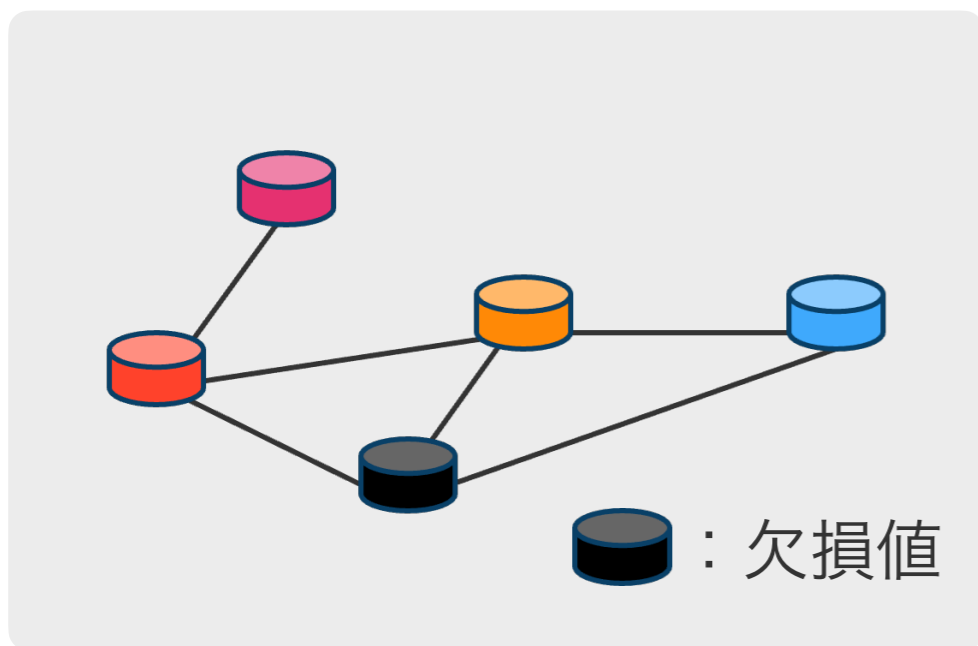
→グラフ信号処理(GSP)で解析可能



グラフ信号の復元はGSPの主要タスクの一つ

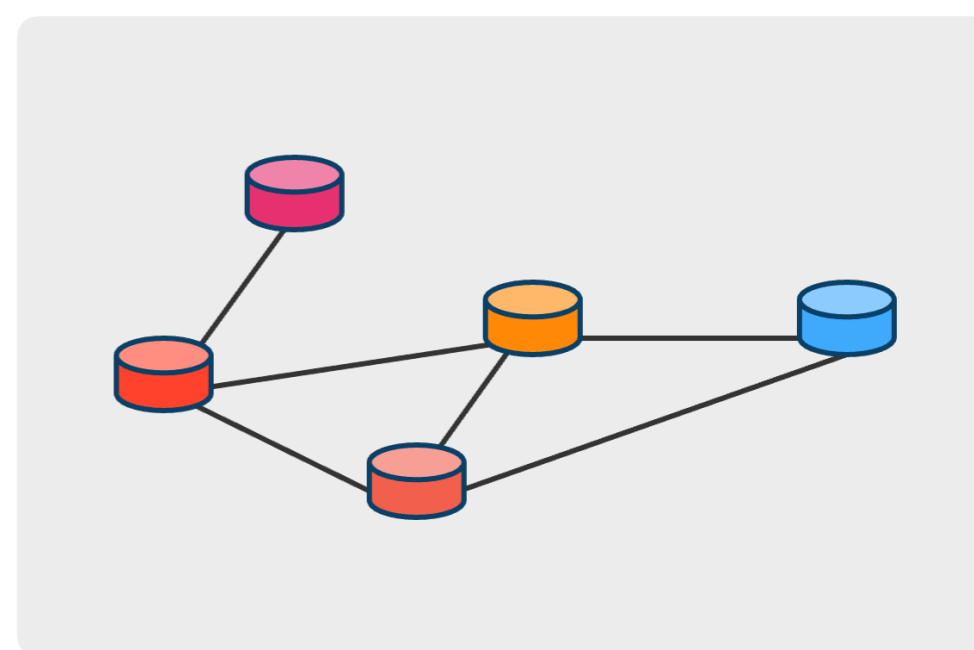
## 複雑な構造を持つ未知の原信号を観測信号から予測

観測信号



モデル化

復元信号



復元

Model-based method  
DNN-based method  
Mixture method (RED etc.)

複雑な構造のデータ  
with ノイズ・欠損

# 先行研究 | Regularization by Denoising (RED)

画像処理分野で提案

ノイズ除去アルゴリズムを含んだ最適化問題を定式化

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \underbrace{f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{\text{Fidelity}} + \frac{\alpha}{2} \underbrace{\tilde{\mathbf{x}}^\top (\tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{x}}))}_{\text{Regularization}}$$

$\tilde{\mathbf{x}}$  : 復元信号

$\mathbf{y}$  : 観測信号

$\alpha$  : ハイパーパラメータ

$\mathcal{D}(\cdot)$  : **(image) denoiser**

$\eta(\cdot)$  : スペクトル半径

$c \approx 1 (c \neq 1)$  : 定数倍パラメータ

✓ 正則化項の勾配が簡単な形で表記できる

$$\nabla(\underbrace{\tilde{\mathbf{x}}^\top (\tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{x}}))}_{\text{Regularization}}) = \tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{x}})$$

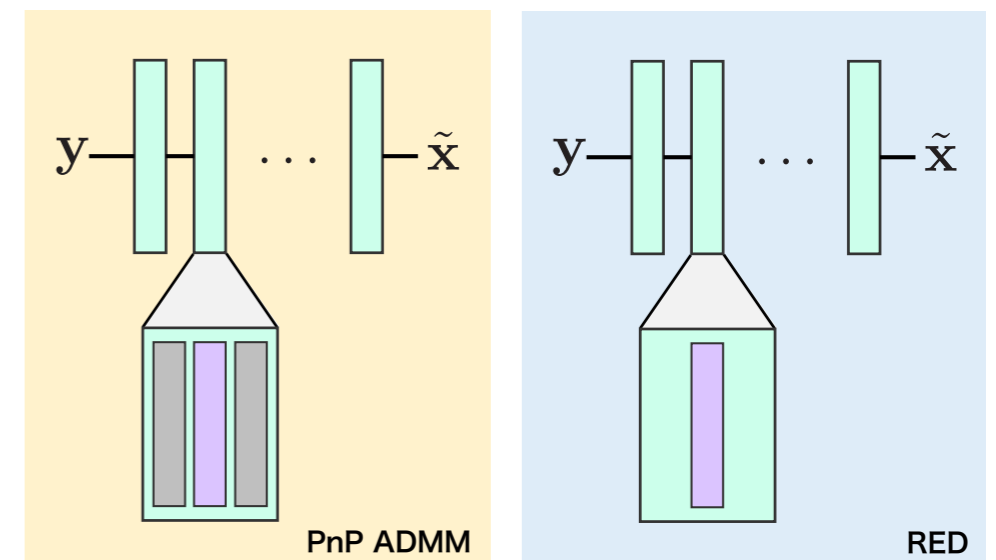
✓ あらゆる反復型アルゴリズムが利用可能

✓ PnP-ADMMに比べて解釈可能性高

✓ denoiserがREDに適用可能か確認する必要あり

条件1 : (Local) homography  $\mathcal{D}(c \cdot \mathbf{y}) = c \cdot \mathcal{D}(\mathbf{y})$

条件2 : Strong Passivity  $\eta(\nabla \mathcal{D}(\mathbf{y})) \leq 1$



## REDを用いたグラフ信号ノイズ除去手法の提案

アルゴリズムの設計

動作理論の確認

パラメータ推定法

$$D(c \cdot \mathbf{y}) = c \cdot D(\mathbf{y}) \\ c \approx 1 (c \neq 1)$$

スケージングの順番によらず出力が一致

Laplacian Regularization

$$D(\mathbf{y}) = (\mathbf{I} + \alpha \mathbf{L})^{-1} \mathbf{y} \quad \mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$ がユークリッド距離に従うと仮定

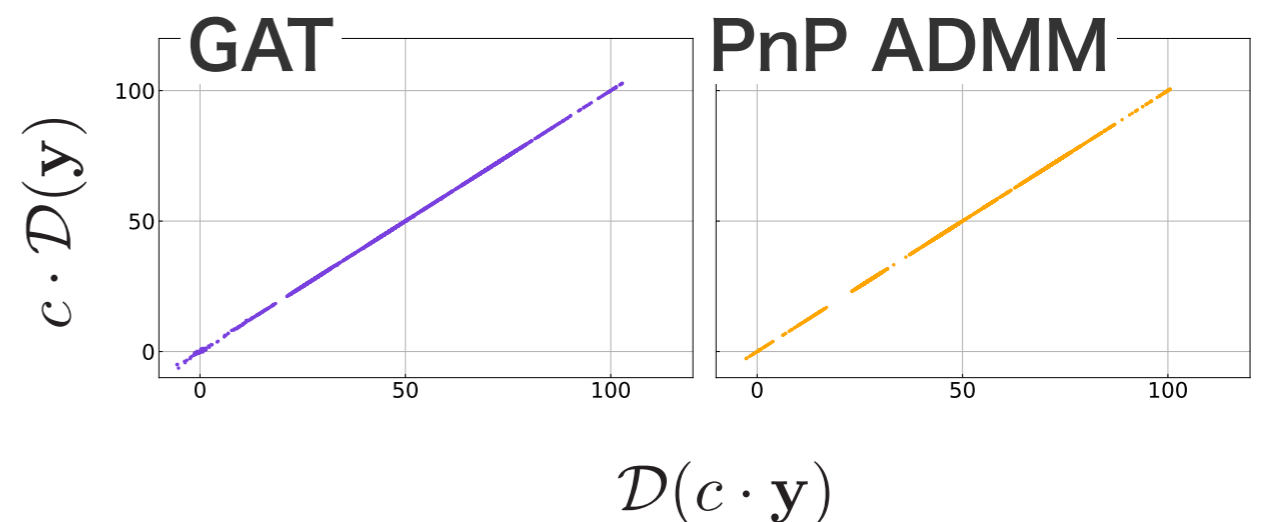
$$[\mathbf{W}]_{i,j} = 1 / \sqrt{\|[\mathbf{x}_i] - [\mathbf{x}_j]\|^2}$$

$$[\mathbf{W}']_{i,j} = 1 / \sqrt{\|c[\mathbf{x}_i] - c[\mathbf{x}_j]\|^2} \\ = [\mathbf{W}]_{i,j} / c$$

重みが正規化された場合は成り立つ

Graph Attention Network  
Plug-and-Play ADMM

denoiserが解析困難→実験的に示す



## REDを用いたグラフ信号ノイズ除去手法の提案

アルゴリズムの設計

動作理論の確認

パラメータ推定法

$$\eta(\nabla \mathcal{D}(\mathbf{y})) \leq 1$$

denoiserが収束

$\eta(\cdot)$ : スペクトル半径

Laplacian Regularization

Graph Attention Network  
Plug-and-Play ADMM

条件1を満たすとき,

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{L})\mathbf{x} \quad h(\mathbf{L}) = (\mathbf{I} + \alpha\mathbf{L})^{-1}$$

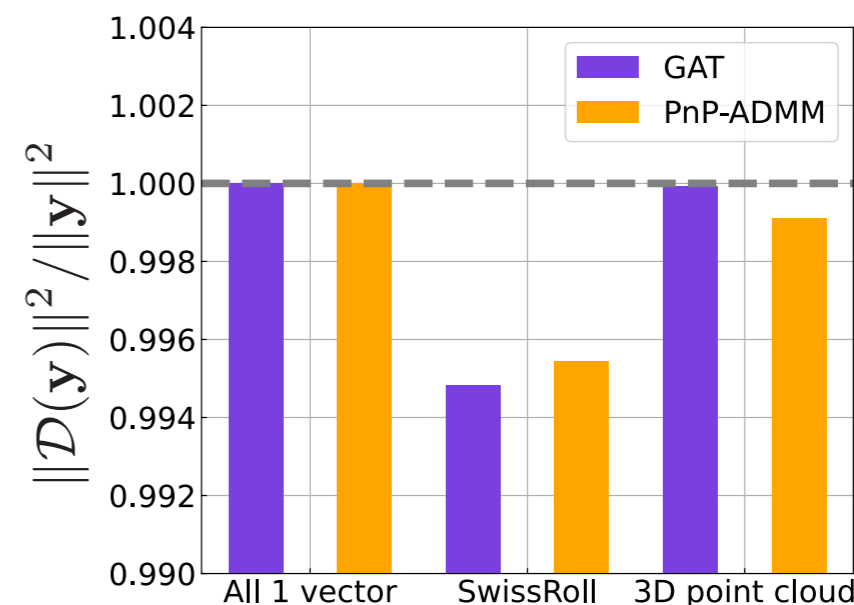
とすると条件2は次のように書き換え可能

$$\eta(h(\mathbf{L})) \leq 1 \quad [\text{Romano+ SIAM 2017}]$$

$\mathbf{L}$ は半正定値行列であるため,

$$\eta(h(\mathbf{L})) = \eta((\mathbf{I} + \alpha\mathbf{L})^{-1}) \leq 1$$

実験的にdenoiserが発散しないことを確認



## REDを用いたグラフ信号ノイズ除去手法の提案

アルゴリズムの設計

動作理論の確認

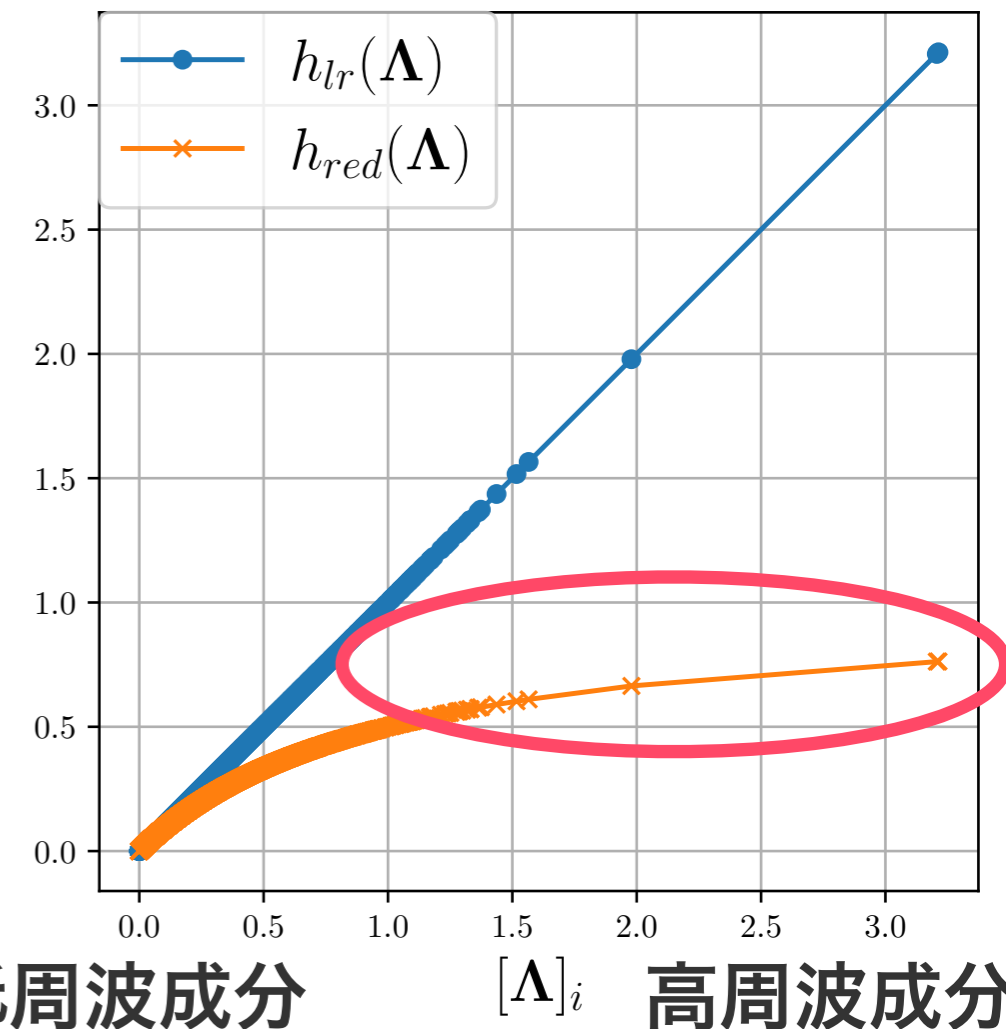
パラメータ推定法

提案手法の正則化項の勾配をLaplacian正則化の勾配と比較

$$\tilde{\mathbf{x}}^\top (\tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1}) \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} \quad \tilde{\mathbf{x}}^\top \mathbf{L} \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{2\mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}}}$$

Laplacian正則化と比較して高周波成分が減衰  
→勾配更新後の信号は高周波成分が残る  
→提案手法はoversmoothingを抑制

フィルタが複雑になり  
高精度なノイズ除去が期待



## REDを用いたグラフ信号ノイズ除去手法の提案

アルゴリズムの設計

動作理論の確認

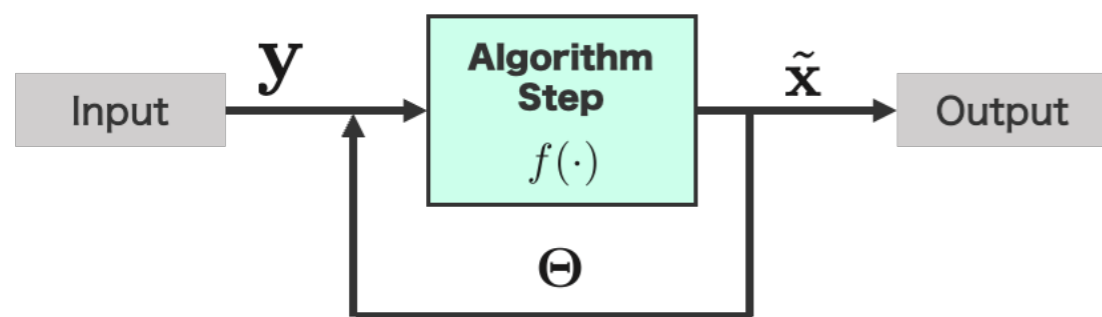
パラメータ推定法

提案手法は正則化パラメータと内部denoiserのハイパーパラメータ推定が必要  
教師あり・教師なしの両方のパラメータ推定方法を提案

### 教師ありパラメータ推定

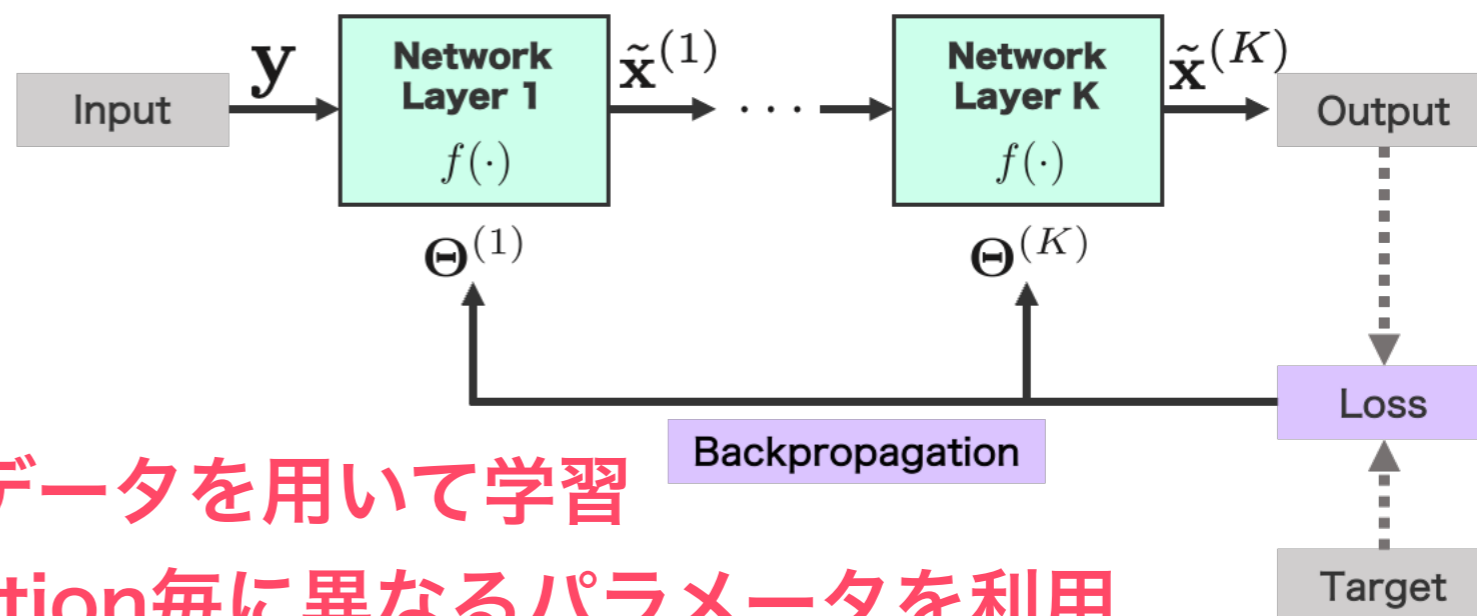
深層展開を利用してアルゴリズムの各反復のハイパーパラメータを学習

#### 従来のアルゴリズム



単一のパラメータを利用

#### 深層展開したアルゴリズム



教師データを用いて学習

iteration毎に異なるパラメータを利用

## REDを用いたグラフ信号ノイズ除去手法の提案

アルゴリズムの設計

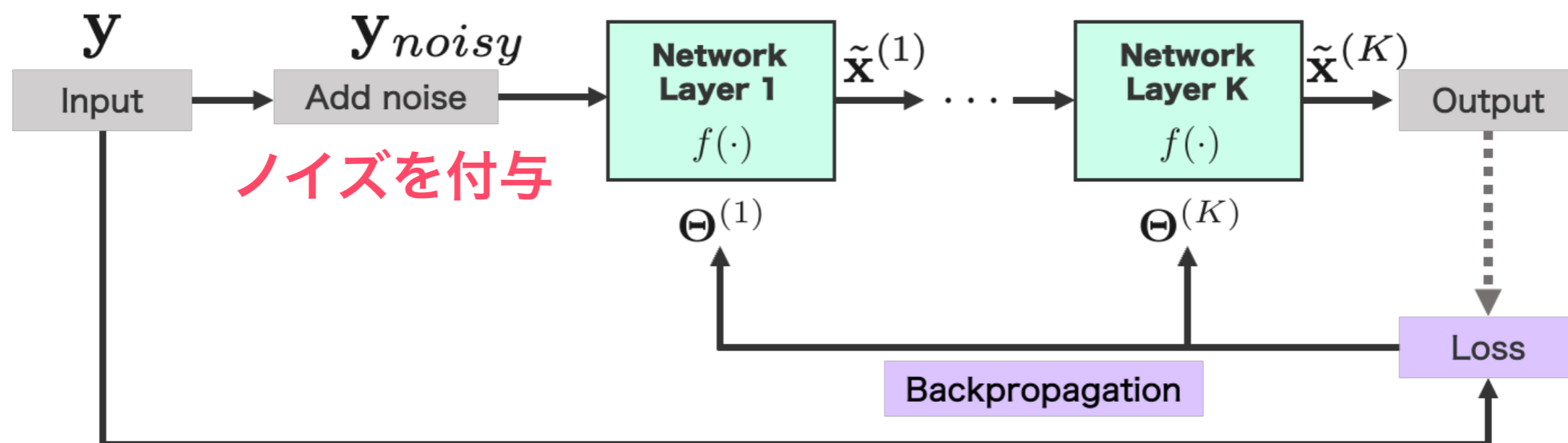
動作理論の確認

パラメータ推定法

提案手法は正則化パラメータと内部denoiserのハイパーパラメータ推定が必要  
教師あり・教師なしの両方のパラメータ推定方法を提案

### 教師なしパラメータ推定手法

観測信号と観測信号+ノイズ信号から深層展開によってパラメータを学習



観測信号と、ノイズを付与した信号の復元信号によって学習

## 実験内容

### 復元性能の比較

- ・ RMSEによるノイズ除去性能の比較
- ・ 既存手法と提案教師なし手法の比較

## 比較手法

- 教師あり手法 : Laplacian Regularization (LR) [Chen+ GlobalSIP 2014]  
PnP-ADMM (with LR) [Yazaki+ ICASSP 2019]
- 教師なし手法 : Untrained GNN (GD) [Chen+ TSP 2022]  
Graph Attention Network (GAT) [Velickovic+ ICLR 2018]

## データセット

### 人工データセット

- ・ 帯域制限グラフ信号

### 実世界データセット

- ・ 3次元点群データセット  
人体モーション  
物体ポリゴン
- ・ 海面水温データセット

## 人工データ

### 教師あり手法

### 教師なし手法

ノイズ強度→	RMSE				
	$\sigma = 5$	10	15	20	25
Observed	5.07	10.50	15.48	19.96	25.91
LR	3.30	3.35	4.22	6.05	7.24
PnP	3.62	3.64	4.84	6.55	7.91
Proposed (lr, all)	3.29	3.10	3.58	<b>5.30</b>	7.17
Proposed (pnp, all)	<b>2.58</b>	<b>2.88</b>	<b>3.39</b>	5.52	<b>6.68</b>
Proposed (lr, DAU)	<b>3.16</b>	<b>3.91</b>	<b>6.27</b>	<b>9.57</b>	<b>13.37</b>
GAT	4.48	6.36	9.18	10.57	14.40
GD	4.48	8.87	13.82	17.64	24.31

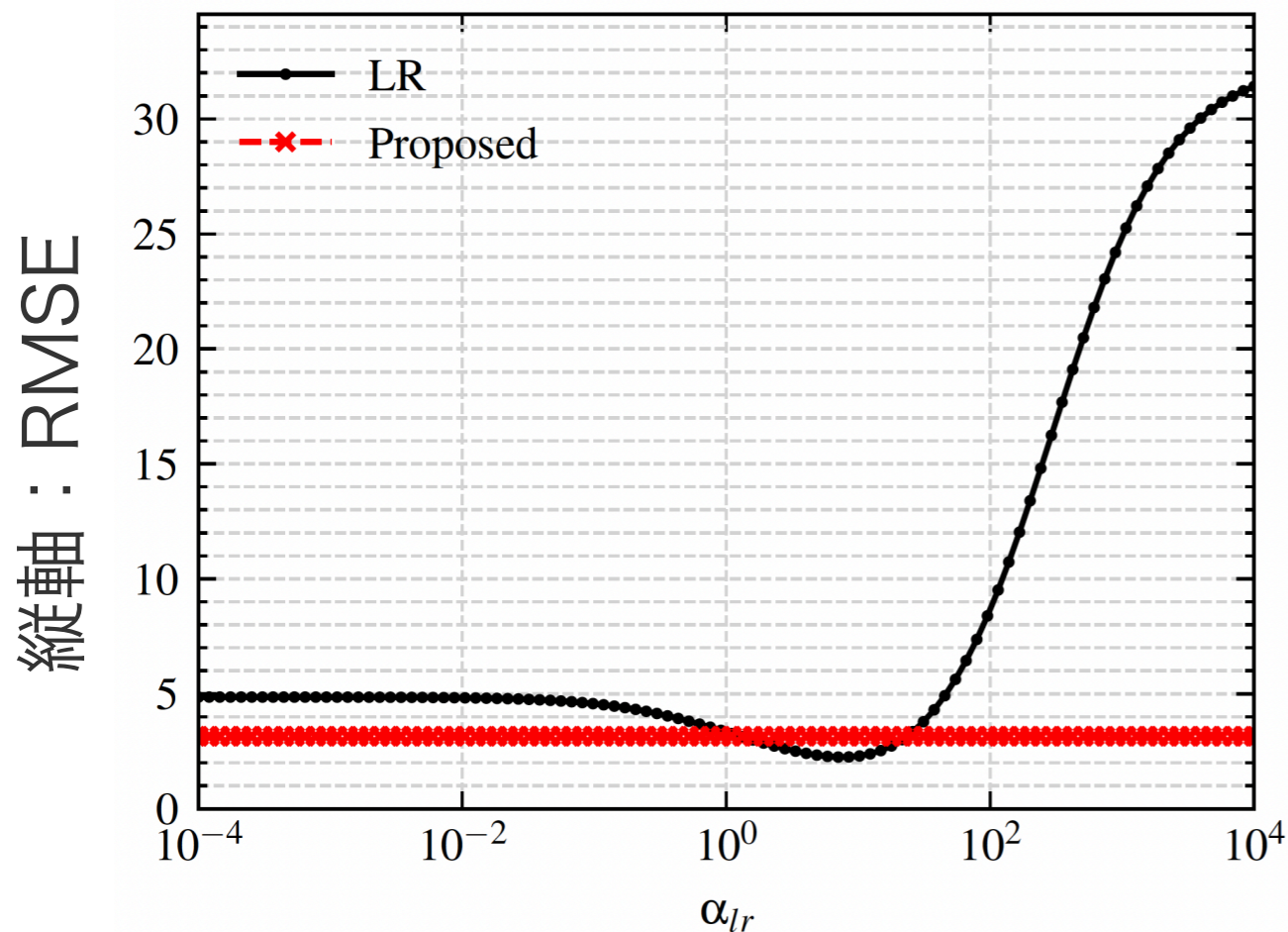
・ 組み込み前のアルゴリズムと比較して、**提案手法は低いRMSE**

→REDによって複雑な表現が可能に

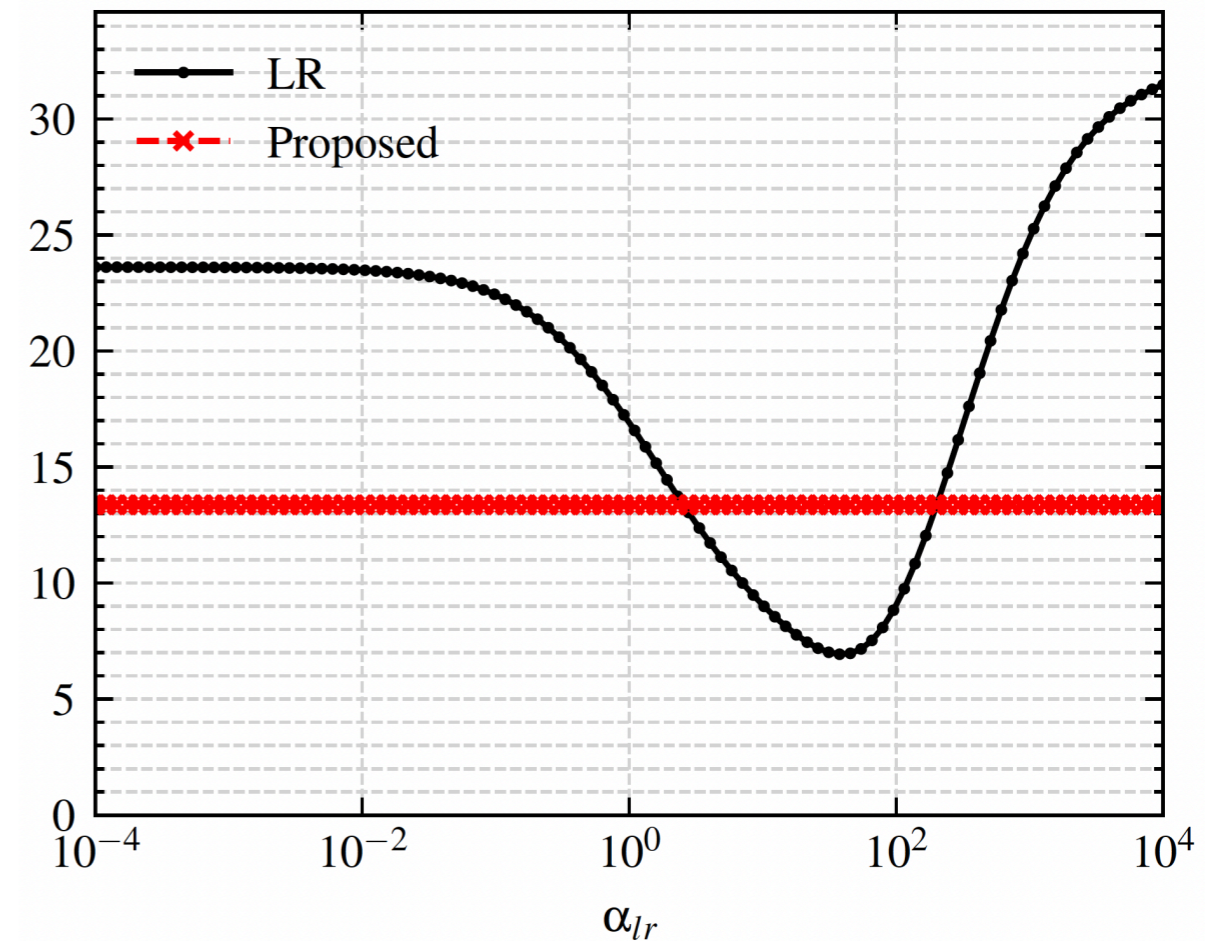
・ ノイズ強度が小さい場合には、**提案教師なし手法が既存の教師あり手法を凌駕**

→教師なし学習でも最適なパラメータが十分に学習されている

・ノイズが小さい場合( $\sigma = 5$ )



・ノイズが大きい場合( $\sigma = 25$ )

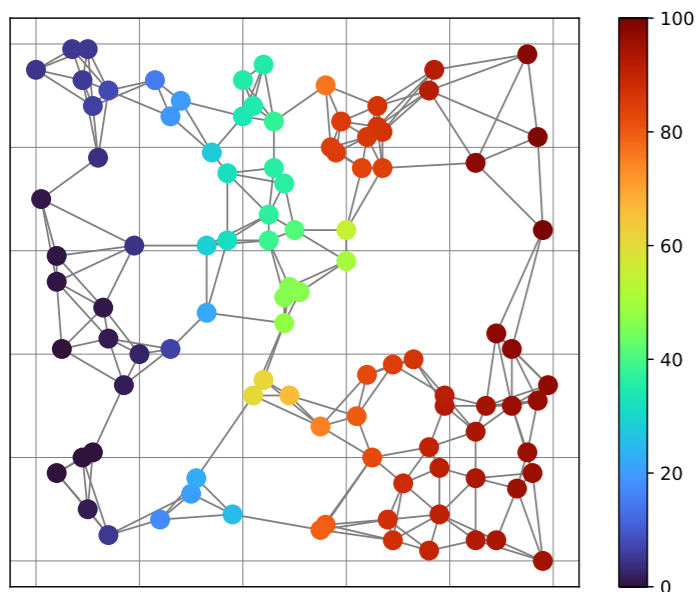


横軸：Laplacian正則化のハイパーパラメータ

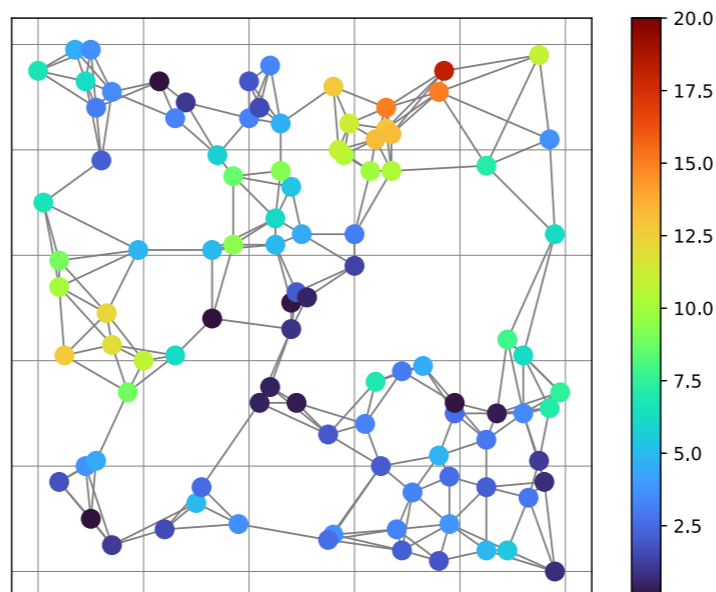
**Laplacian正則化**：適切なパラメータを推定できれば高いノイズ除去性能  
その範囲はごく狭い範囲に限られる

**提案手法**：教師なしでパラメータを学習可能  
ほとんどの場合でLaplacian正則化より高性能

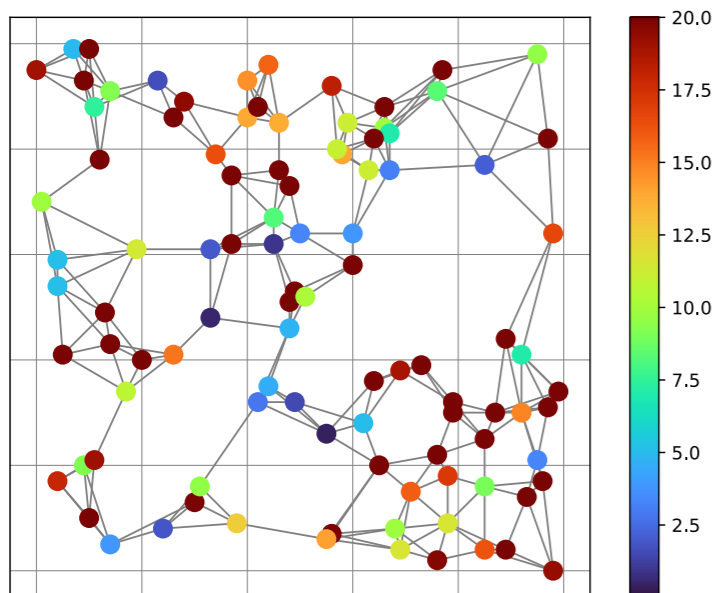
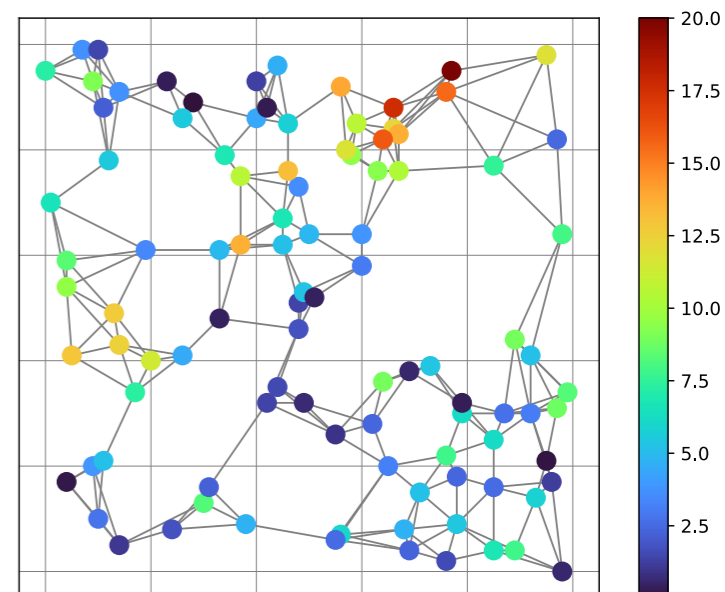
## groundtruth



## LR (6.63)

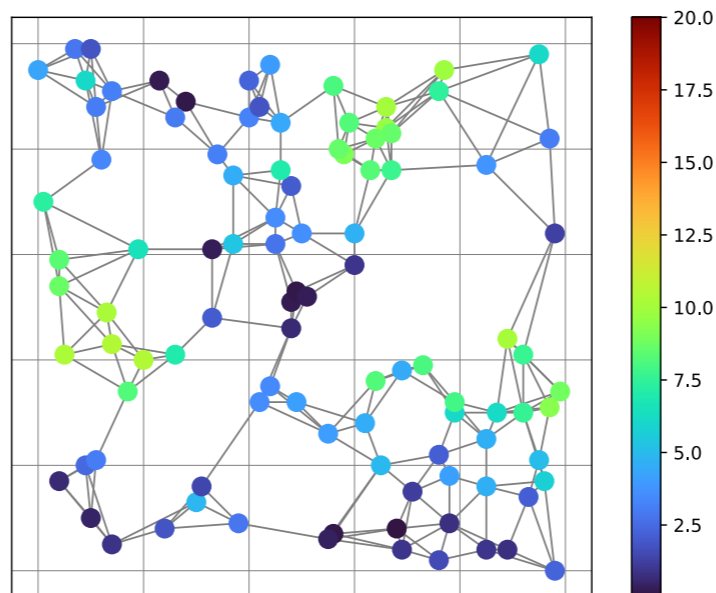


## PnP (7.40)



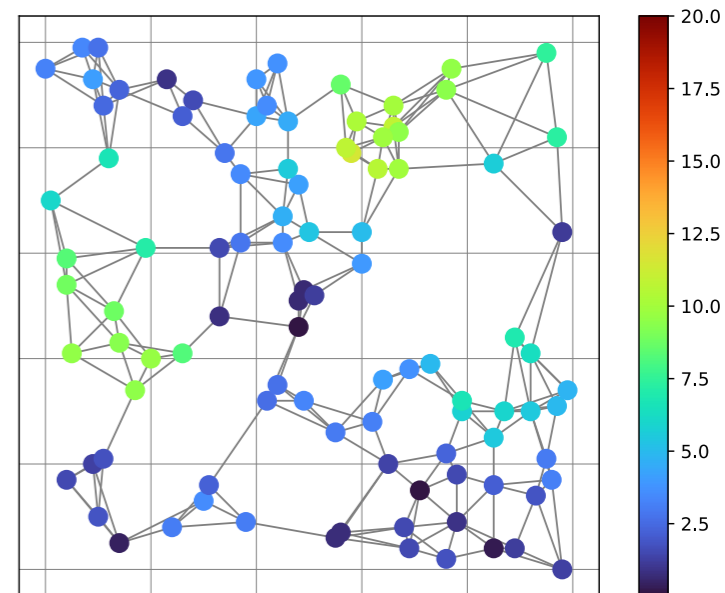
## 観測信号

(RMSE: 24.97)



## Proposed with LR

(5.56)



## Proposed with PnP

(5.48)

※groundtruthとの差分を表示

## 研究概要

Regularization by Denoising (RED)を用いた**グラフ信号のノイズ除去**

## 提案手法

- ・ RED適用条件の確認・アルゴリズム設計
- ・ 動作理論の解明
- ・ パラメータ推定法の確立

## 発表状況

European Signal Processing Conference (EUSIPCO) 2024 発表済  
Open Journal for Signal Processing (OJSP) への投稿準備中