

Graph-RED: Regularization by Denoising を用いたグラフ信号のノイズ除去

小島 颯*1, 東 広志*2, 田中 雄一*2

*1 東京農工大学

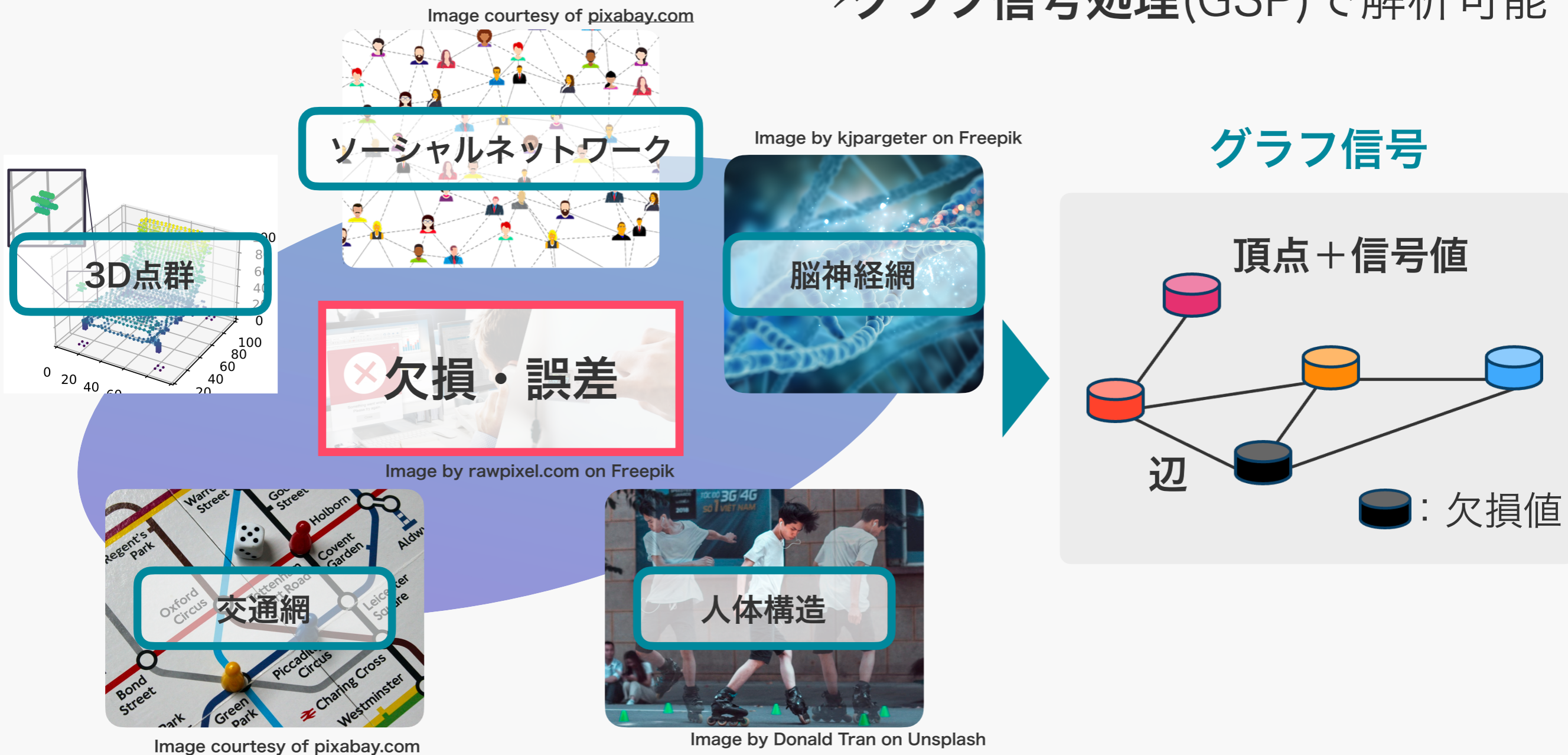
*2 大阪大学

{h-kojima, tanaka, higashi}@msp-lab.org



世の中のデータの多くはネットワーク構造を持つ

→グラフ信号処理(GSP)で解析可能

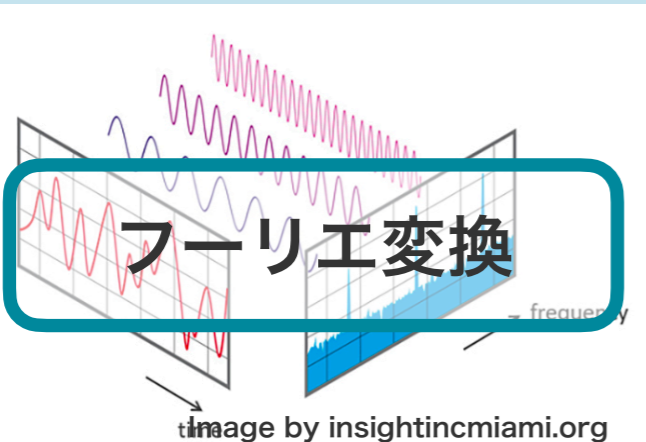


グラフ信号の復元はGSPの主要タスクの一つ

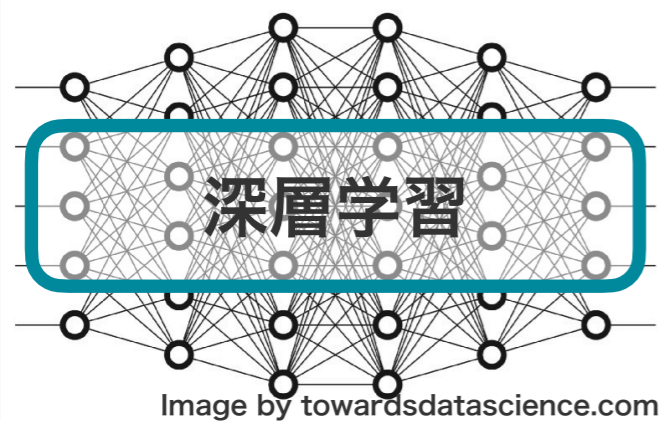
信号処理の成熟された技術をグラフ信号処理に応用できるのか？

従来の信号処理

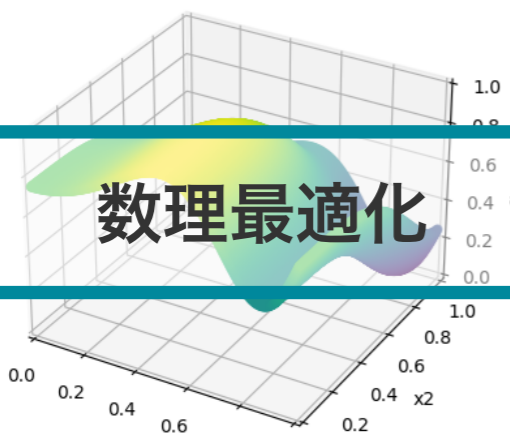
フーリエ変換



深層学習

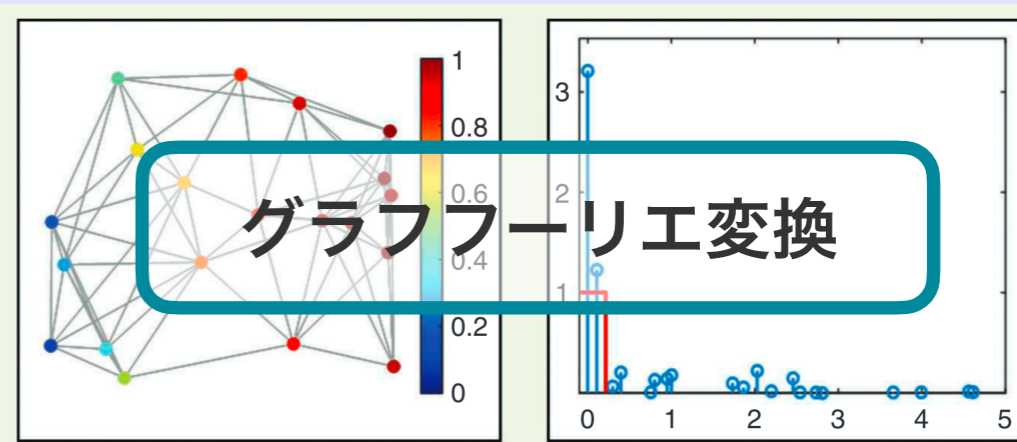


数理最適化

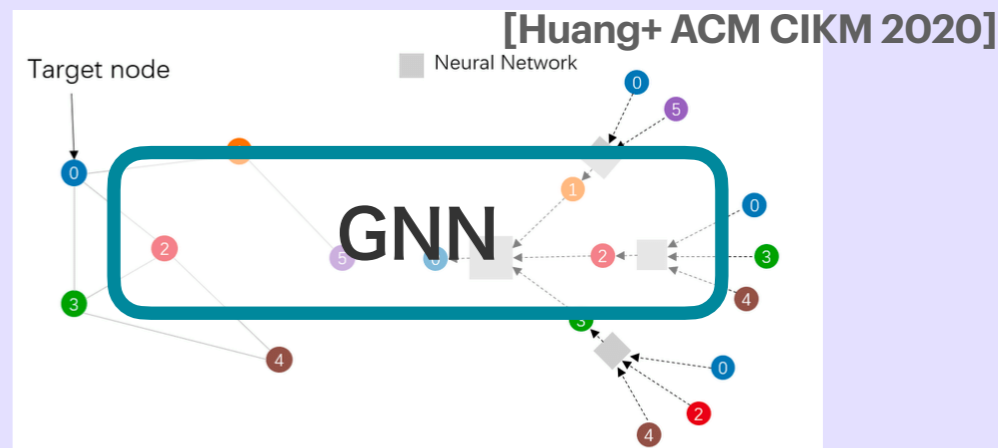


グラフ信号処理

グラフフーリエ変換



GNN



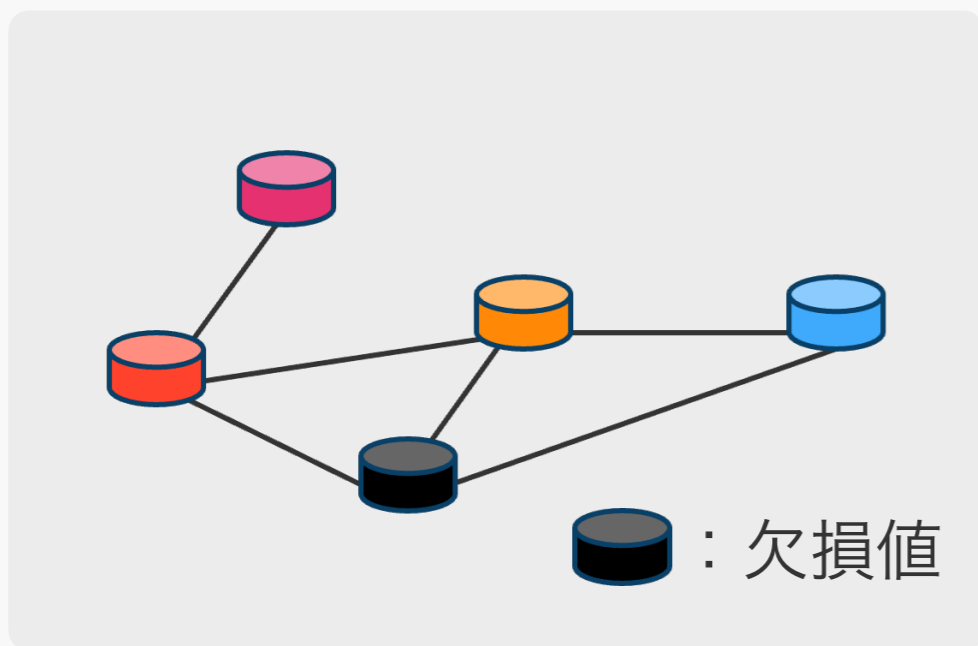
Plug-and-Play ADMM
Deep Algorithm Unrolling
Regularization by Denoising



適切に拡張する必要あり

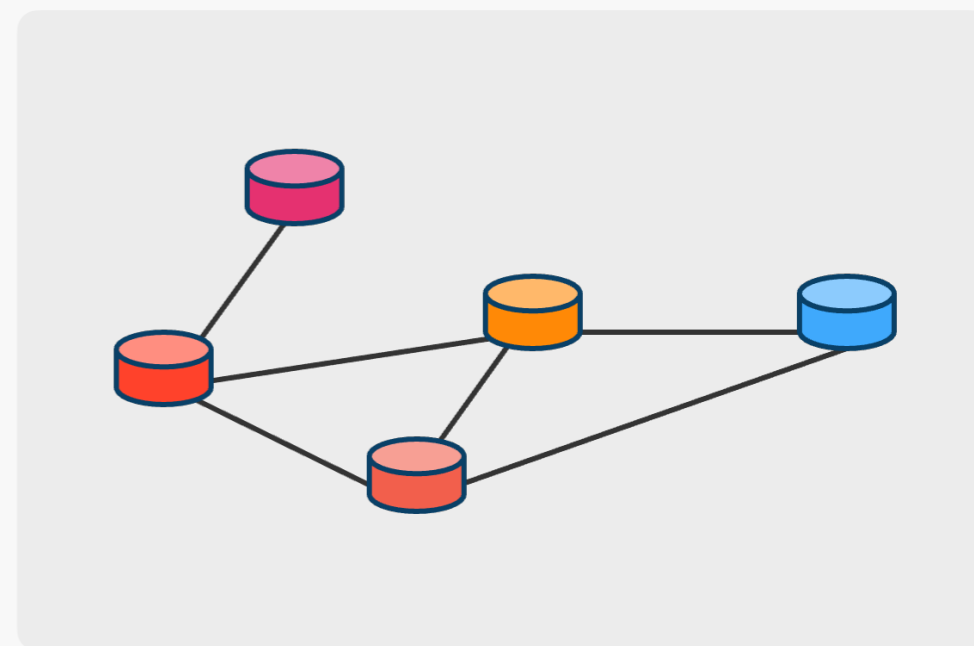
複雑な構造を持つ未知の原信号を観測信号から予測

観測信号



モデル化

復元信号



復元

Model-based method
DNN-based method
Mixture method (RED etc.)

複雑な構造のデータ
with ノイズ・欠損



先行研究

先行研究 | Regularization by Denoising (RED)

ノイズ除去アルゴリズムを含んだ最適化問題を定式化

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \frac{1}{2} \underbrace{f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{\text{Fidelity}} + \frac{\alpha}{2} \underbrace{\tilde{\mathbf{x}}^\top (\tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{x}}))}_{\text{Regularization}}$$

$\tilde{\mathbf{x}}$: 復元信号

\mathbf{y} : 観測信号

α : ハイパーパラメータ

$\mathcal{D}(\cdot)$: (image) denoiser

$\eta(\cdot)$: スペクトル半径

$c \approx 1 (c \neq 1)$: 定数倍パラメータ

✓ 正則化項の勾配が簡単な形で表記できる

$$\nabla(\tilde{\mathbf{x}}^\top (\tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{x}}))) = \tilde{\mathbf{x}} - \mathcal{D}(\tilde{\mathbf{x}})$$

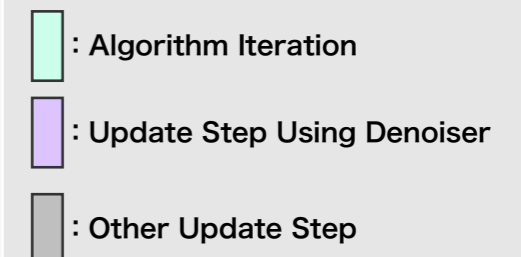
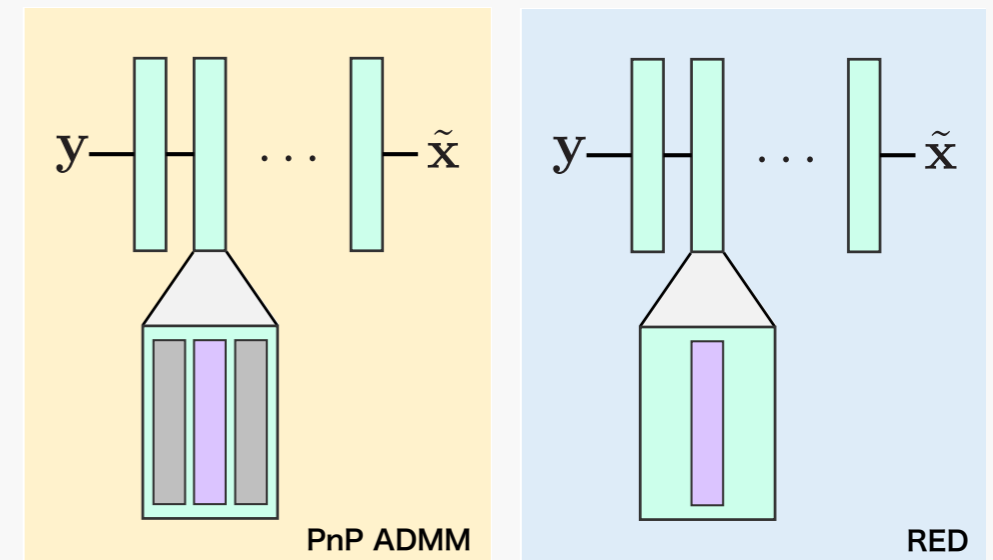
✓ あらゆる反復型アルゴリズムが利用可能

✓ PnP-ADMMに比べて解釈可能性高

✓ denoiserがREDに適用可能か確認する必要あり

条件1 : (Local) homography $\mathcal{D}(c \cdot \mathbf{y}) = c \cdot \mathcal{D}(\mathbf{y})$

条件2 : Strong Passivity $\eta(\nabla \mathcal{D}(\mathbf{y})) \leq 1$

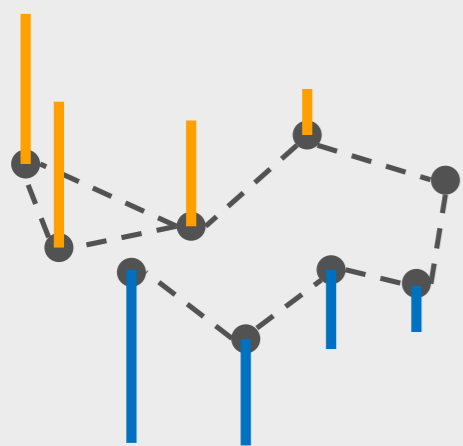


ラプラシアン二次形式でグラフの空間的平滑性を定義

ラプラシアン二次形式

$$S_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}$$

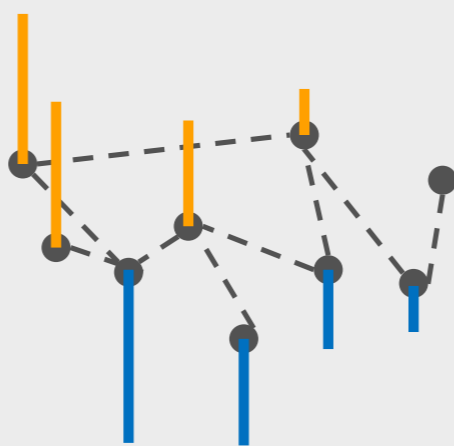
ラプラシアン二次形式が小さくなるように
最小化問題を設計



二次形式 **小**

信号値が滑らか

<



二次形式 **大**

信号値が滑らかでない

[Pang+ IEEE TIP 2017]

Graph Laplacian Regularization

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \underbrace{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2}_{\text{Fidelity}} + \alpha \underbrace{S_2(\tilde{\mathbf{x}})}_{\text{Smoothness}}$$

$\tilde{\mathbf{x}}$: 復元信号

\mathbf{y} : 観測信号

α : ハイパーパラメータ

$S_2(\cdot)$: ラプラシアン2次形式

$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$: グラフラプラシアン

\mathbf{D} : 度数行列

\mathbf{W} : 重み付隣接行列



提案手法

REDを用いたグラフ信号のノイズ除去手法を提案

条件1の確認

条件2の確認

REDの適用

$$\mathcal{D}(c \cdot \mathbf{y}) = c \cdot \mathcal{D}(\mathbf{y})$$

$c \approx 1 (c \neq 1)$

スケーリングの順番によらず出力が一致

Laplacian Regularization

$$\mathcal{D}(\mathbf{y}) = (\mathbf{I} + \alpha \mathbf{L})^{-1} \mathbf{y} \quad \mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$$

\mathbf{W} がユークリッド距離に従うと仮定

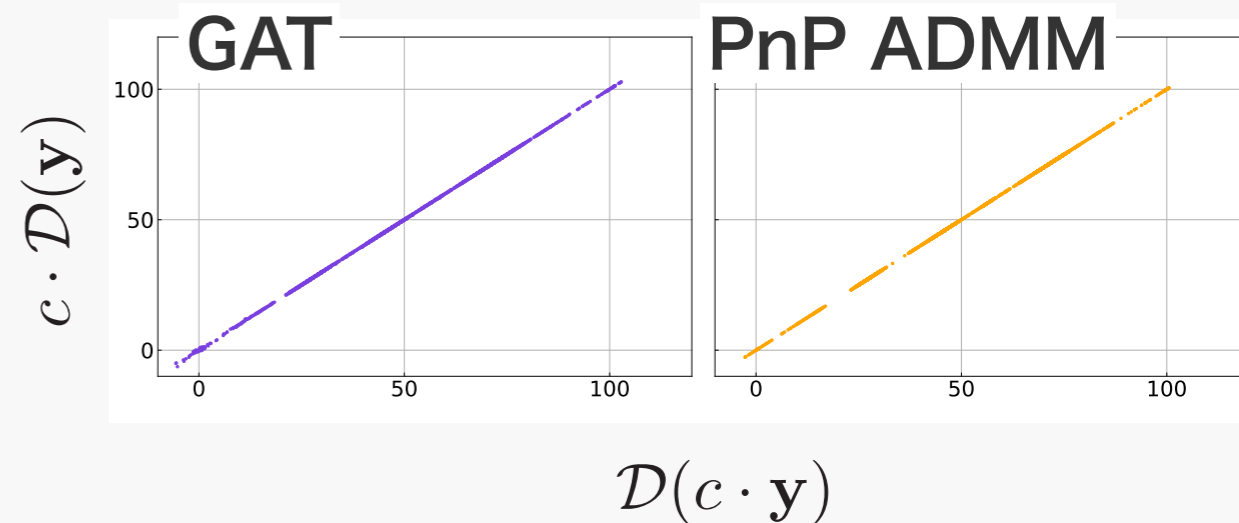
$$[\mathbf{W}]_{i,j} = 1 / \sqrt{\|[\mathbf{x}_i] - [\mathbf{x}_j]\|^2}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}']_{i,j} &= 1 / \sqrt{\|c[\mathbf{x}_i] - c[\mathbf{x}_j]\|^2} \\ &= [\mathbf{W}]_{i,j} / c \end{aligned}$$

重みが正規化された場合は成り立つ

Graph Attention Network Plug-and-Play ADMM

denoiserが解析困難 → 実験的に示す



REDを用いたグラフ信号のノイズ除去手法を提案

条件1の確認

条件2の確認

REDの適用

$$\eta(\nabla \mathcal{D}(\mathbf{y})) \leq 1$$

denoiserが収束

$\eta(\cdot)$: スペクトル半径

Laplacian Regularization

条件1を満たすとき,

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{L})\mathbf{x} \quad h(\mathbf{L}) = (\mathbf{I} + \alpha\mathbf{L})^{-1}$$

とすると条件2は次のように書き換え可能

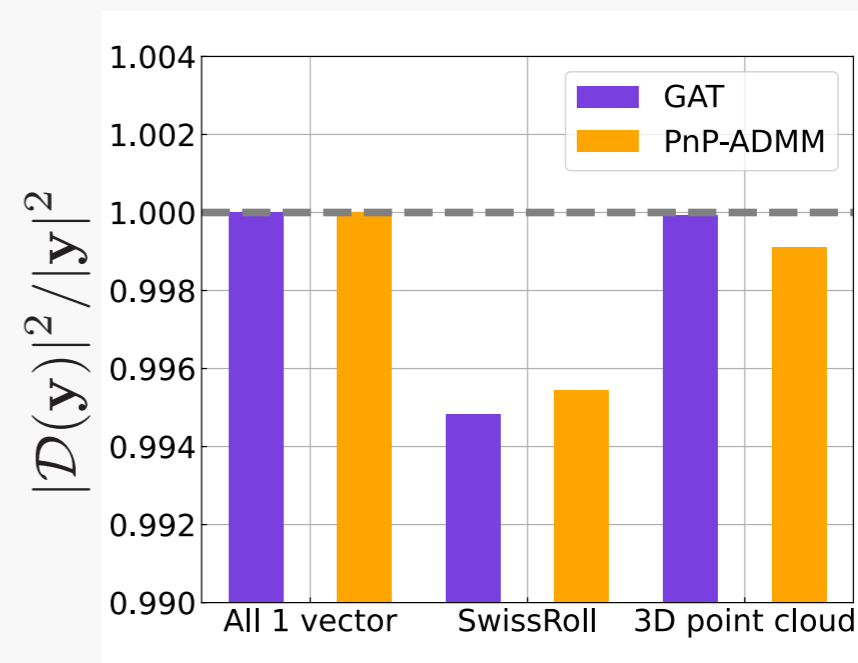
$$\eta(h(\mathbf{L})) \leq 1 \quad [\text{Romano+ SIAM 2017}]$$

\mathbf{L} は半正定値行列であるため,

$$\eta(h(\mathbf{L})) = \eta((\mathbf{I} + \alpha\mathbf{L})^{-1}) \leq 1$$

Graph Attention Network
Plug-and-Play ADMM

実験的にdenoiserが発散しないことを確認



REDを用いたグラフ信号のノイズ除去手法を提案

条件1の確認

条件2の確認

REDの適用

条件を満たすグラフdenoiserを組み込み
REDの勾配を利用した更新ステップ

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\nabla \mathbf{x}^{(k)} + \gamma \Delta \mathbf{x}^{(k-1)} \quad (18)$$

$$\nabla \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{y} + \alpha (\mathbf{x}^{(k)} - \mathcal{D}_{\mathcal{G}}(\mathbf{x}^{(k)})). \quad (19)$$

グラフdenoiserの初期化

共役勾配法を利用した更新ステップ

グラフ信号を通常の信号と
同じフレームワークで処理可能

Algorithm 1 Graph-RED with conjugate gradient method

Input:

\mathbf{y} : Observed signal
 K : Number of layers
 \mathcal{G} : Graph

Output:

\mathbf{x} : Restored signals

```

1) Initialize a graph signal denoiser  $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}(\cdot)$ 
for  $k = 1$  to  $K$  do
    2) Stepsize decision (using (18) and (19))
         $\tau = -\frac{g(\Delta \mathbf{x}^{(k-1)}, \nabla \mathbf{x}^{(k-1)})}{g(\Delta \mathbf{x}^{(k-1)}, \nabla \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{y})}$ 
    3) Search direction update (using (18) and (19))
         $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \tau \Delta \mathbf{x}^{(k-1)}$ 
         $\gamma = \frac{\|\nabla \mathbf{x}^{(k)}\|_F^2}{\|\nabla \mathbf{x}^{(k-1)}\|_F^2}$ 
         $\Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\nabla \mathbf{x}^{(k)} + \gamma \Delta \mathbf{x}^{(k-1)}$ 
end for
return  $\mathbf{x}^{(K)}$  as  $\mathbf{x}$ 
    
```



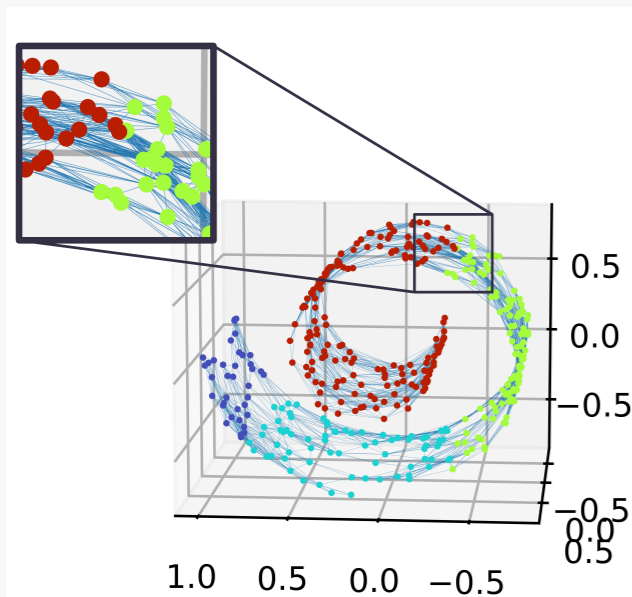
実験

実験内容

グラフ信号のノイズ除去性能の比較

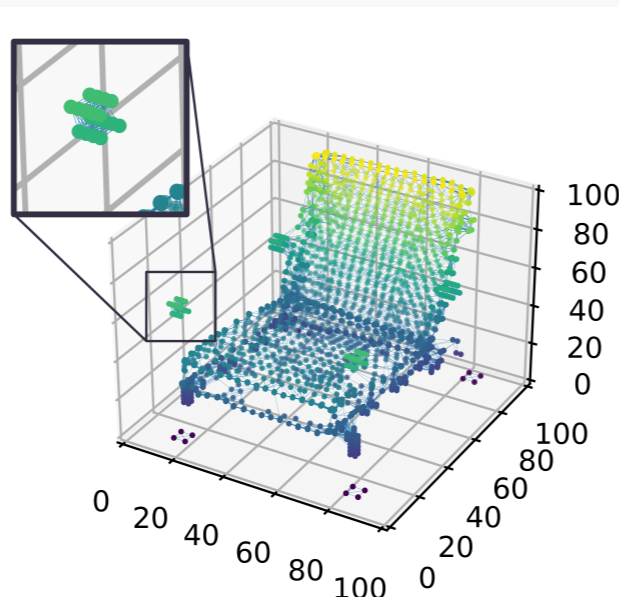
データセット

人工データ



[Wu+ CVPR 2015]

3次元点群



実験設定

評価項目：RMSE

パラメータ設定：グリッドサーチ

辺の重み：[0,1]にスケーリング

比較手法

Total Variation (TV) [Chen+ GlobalSIP 2014]

Laplacian Regularization (LR)

Untrained GNN (UGNN) [Chen+ TSP 2022]

Graph Attention Network (GAT)

PnP-ADMM (with LR) [Velickovic+ ICLR 2018]

[Yazaki+ ICASSP 2019]

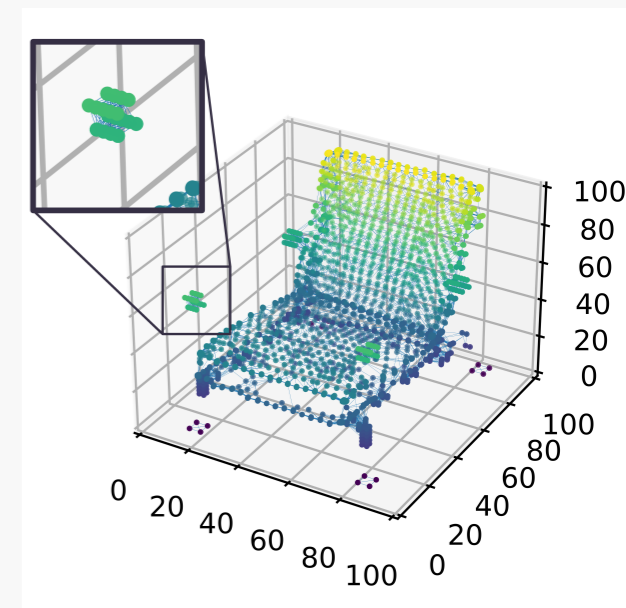
人工データセット (RMSE) 3次元点群セット (RMSE)

Noise Level σ^2	20	40	60	80	100	2	4	6	8	10
TV	5.50	6.55	8.07	8.74	9.68	2.08	2.46	2.83	3.11	3.41
LR	4.21	5.79	7.14	8.13	9.14	1.31	1.88	2.32	2.69	3.03
UGNN	6.24	6.91	6.98	8.15	8.43	1.83	2.04	2.48	2.89	2.99
GAT	5.11	5.68	5.77	7.14	7.85	1.25	1.76	2.16	2.52	2.84
PnP-ADMM (LR)	4.07	4.90	4.84	5.65	6.28	1.14	1.57	1.93	2.24	2.53
<u>Graph-RED (LR)</u>	3.81	4.67	4.83	5.63	6.28	1.15	1.54	1.87	2.15	2.42

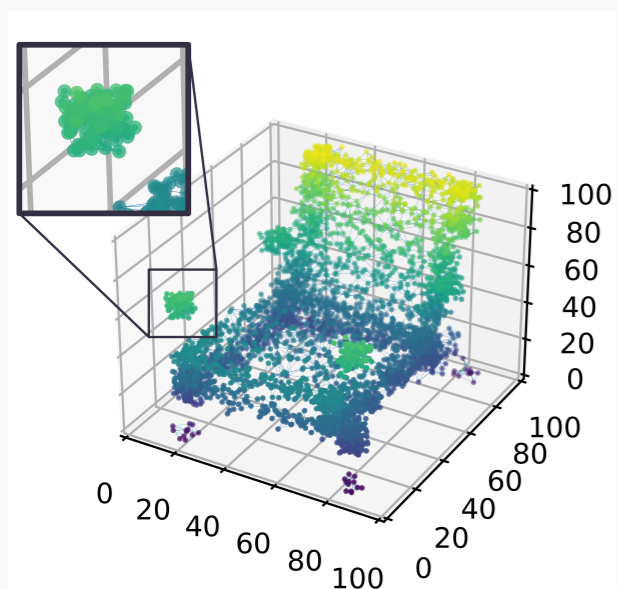
- 単体のLRと比較してPnP-ADMMとGraph-REDは精度向上
PnP-ADMMと比較しても精度の向上が見られる
- UGNNやGATは少数の教師データからの学習するため低い復元精度

- LR単体では十分なノイズ除去が行われない場合も Graph-REDで十分にノイズ除去可能
- PnP-ADMMと比較しても原信号に近い復元

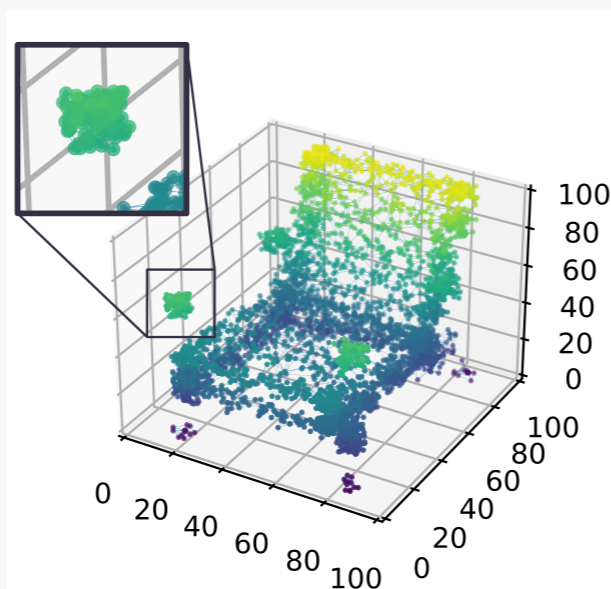
原信号



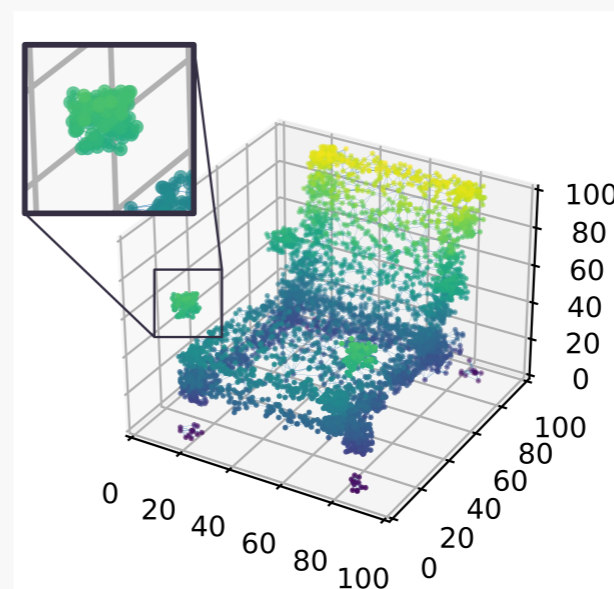
観測信号 (RMSE:1.98)



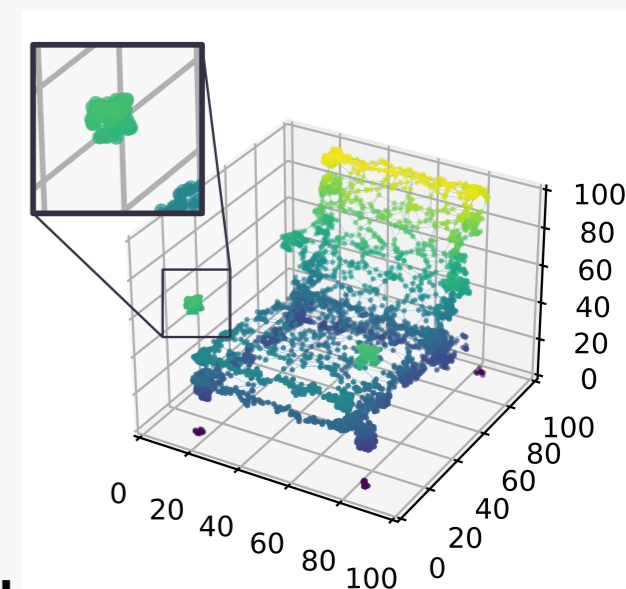
LR (1.92)



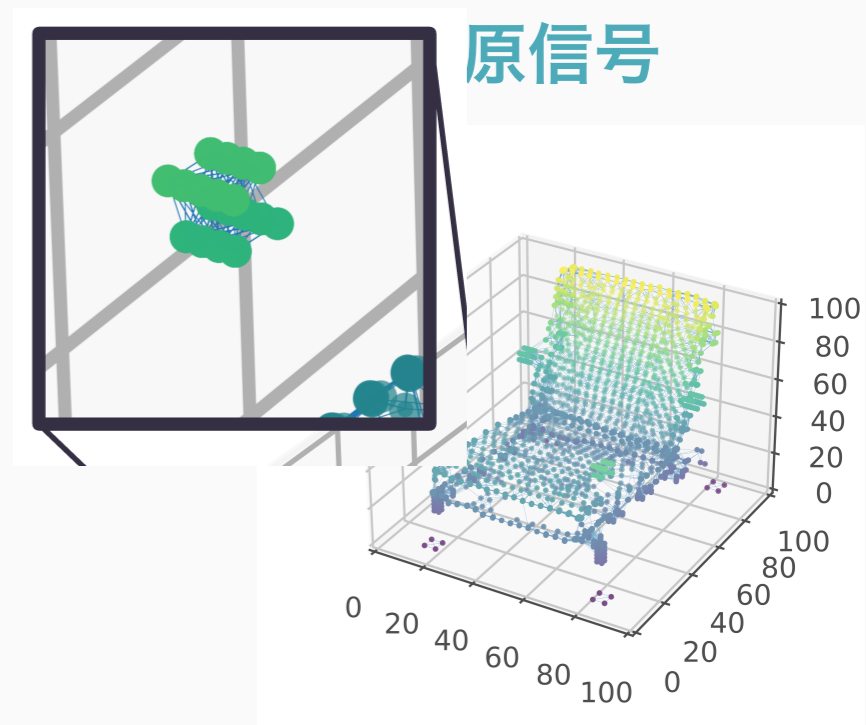
PnP-ADMM (1.74)



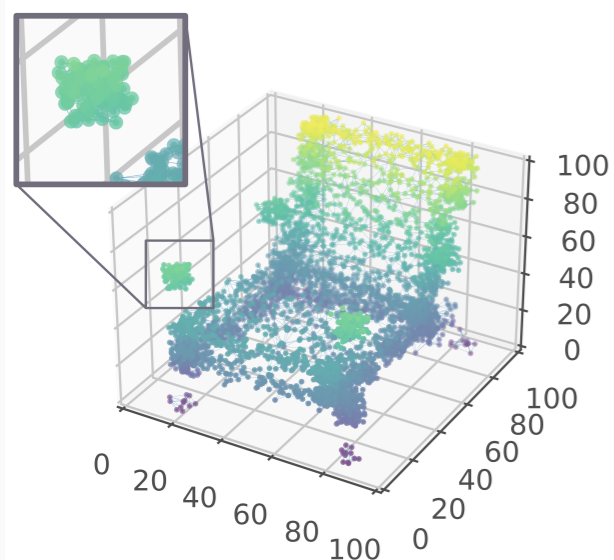
Graph-RED (1.72)



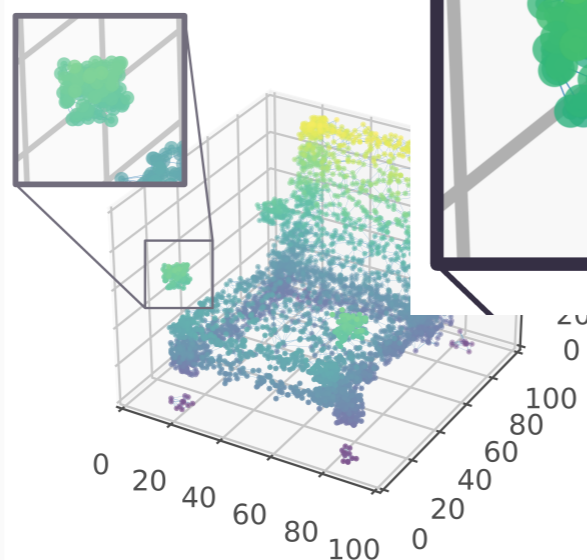
- LR単体では十分なノイズ除去が行われない場合も Graph-REDで十分にノイズ除去可能
- PnP-ADMMと比較しても原信号に近い復元



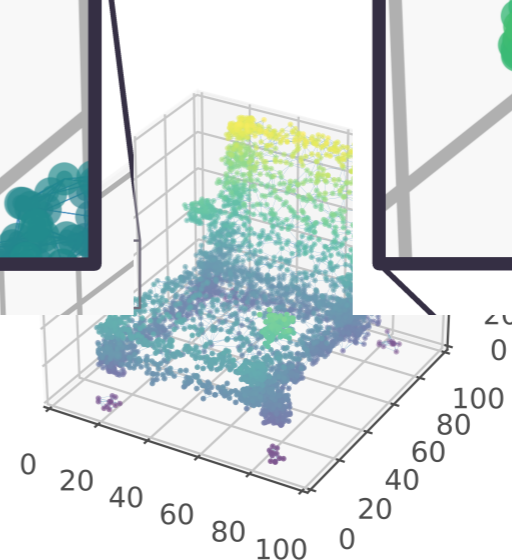
観測信号 (RMSE:1.98)



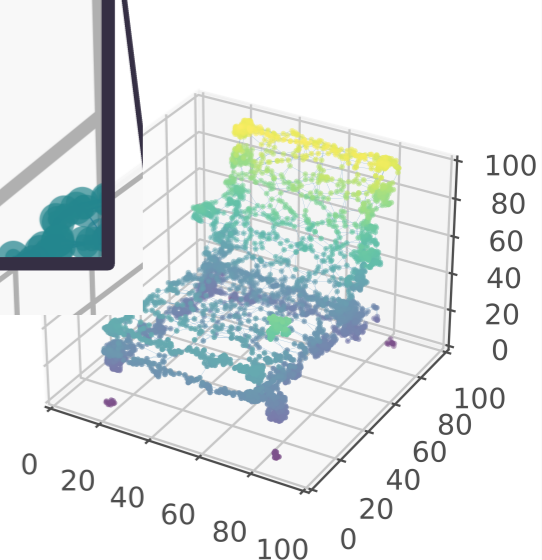
LR (1.92)



ADMM



Graph-RED (1.72)



研究概要

Regularization by Denoisingを用いた**グラフ信号**の**ノイズ除去**

実験

合成データ・実データに対してのノイズ除去実験

発表状況

ICASSP 2024投稿済, 査読中

今後の展望

他のdenoiserを用いた実験
ノイズ除去+補間への拡張